



TD5

SÉRIES, DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.

EXERCICE 1 *Convergence de séries.*

Examiner la convergence des séries suivantes :

1. $\sum_{k \geq 2} \frac{\ln(k)}{k}$.

2. $\sum_{k \geq 0} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$.

3. $\sum_{k \geq 1} \frac{k-2}{k^3 + 3k - \ln(k)}$.

4. $\sum_{k \geq 1} (\ln k)^{-\ln k}$.

5. $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{k}$.

6. $\sum_{k \geq 0} \sqrt[k]{k+1} - \sqrt[k]{k}$.

Indication : Trouver un équivalent du terme général avec l'IAF.

EXERCICE 2 *Développements limités.*

Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de x_0 puis calculer la limite proposée :

1. $f(x) = \frac{4e^{x-2}}{x^2}$ en $x_0 = 2$ puis $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

En déduire que f est dérivable en $x_0 = 2$ et déterminer $f'(2)$.

2. $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ en $x_0 = 1$, puis $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 1 - x}{(x - 1)^2}$.

Indication : se ramener en 0 par un changement de variable : $f(x) = f(2+h) = \dots$ et $g(x) = g(1+h) = \dots$

EXERCICE 3 *EMLyon 2009 Exercice 1.*

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Partie I : Étude d'une fonction.

1. a. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- b. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- c. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{-1}{2}.$$

- d. Établir que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et préciser $f'(0)$.
2. a. Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par
- $$u(x) = (1-x)e^x - 1.$$
- b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$.
- c. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$, puis dresser le tableau de variations de f .
- d. Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote lorsque la variable tend vers $-\infty$.
- e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f .

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.
- Établir que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.
 - Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.
 - Montrer que tout $x \in [0, +\infty[$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.
 - Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.
- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$.
- Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
- Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale.

On note $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

- Montrer que G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $0 \leq G(x) \leq xf(x)$.
En déduire la limite de G en $+\infty$.
 - Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $G(x) \leq xf(x)$.
En déduire la limite de G en $-\infty$.
- Dresser le tableau de variations de G . On n'essiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

EXERCICE 4

Dans tout l'exercice, on considère

- La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2};$$

- La fonction F définie sur $] -1, +\infty[$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt;$$

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie I : étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Déterminer les variations de f , présentées sous forme d'un tableau.

Partie II : Étude de la fonction F .

1. Justifier que F est bien définie sur $] -1, +\infty[$ et que F est de classe \mathcal{C}^1 sur son ensemble de définition.
2. À l'aide du changement de variables $u = t + 1$, montrer que pour tout $x > -1$,

$$F(x) = \ln(x + 1) - \frac{x}{x + 1}.$$

3. À l'aide d'équivalents, déterminer les limites de F aux bornes de son ensemble de définition.
4. a. Étudier la concavité de F . On montrera notamment que F admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.
b. Montrer que pour tout $x > -1$ et non nul, on a $F(x) > 0$.
5. Rappeler les développements limités d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et de $\frac{1}{1+x}$. En déduire le développement limité de F à l'ordre 2 en 0.
6. Préciser l'équation de la tangente à la courbe F en 0, et leurs positions relatives.
7. Représenter l'allure de la courbe représentative de F ainsi que, sur le même graphique, la tangente en 0.

Partie III : Étude la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$.
3. En déduire la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers une limite à préciser.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n}.$$

- b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

5. a. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$.
b. En déduire que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

6. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.
7. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.